2.4 Probabilidad de un Evento

CONCEPTO DE PROBABILIDAD

La probabilidad de un evento $A \in P(S)$, denotada con $P(A)$, es una medida de la posibilidad de que se realice A si se ejecuta el experimento una vez. Esta medida se define de modo tal que satisfaga ciertas condiciones.

> Una **distribución de probabilidad** o **función de probabilidad** P es una función que asigna a cada evento un número real de modo que
>
> 1. $P(A) \geq 0$.
> 2. $P(S) = 1$.
> 3. Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ son eventos mutuamente excluyentes ($A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$) entonces
>
> $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

De las condiciones anteriores se deduce:

Propiedades de P.

1) $P(\varnothing) = 0$.
2) Si $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i, j = 1, \ldots, n$, entonces $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
3) $P(A^c) = 1 - P(A)$.
4) $0 \leq P(A) \leq 1$.
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6) Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Ejemplo. El experimento consiste en tirar una moneda. Se considera

$$S = \{cara, ceca\}$$

La familia de eventos es

$$P(S) = \{\varnothing, \{cara\}, \{ceca\}, S\}$$

Si definimos

$$P(\varnothing) = 0,\ P(S) = 1,\ P(\{cara\}) = 1/2 \text{ y } P(\{ceca\}) = 1/2,$$

se puede demostrar que P verifica las condiciones anteriores. Por lo tanto es una distribución de probabilidad.

Podría definirse

$$P(\varnothing) = 0,\ P(S) = 1,\ P(\{cara\}) = 1/4 \text{ y } P(\{ceca\}) = 3/4.$$

y también se verificarían las condiciones.

Si el espacio muestral es discreto, para definir P los únicos valores que necesitamos especificar son las probabilidades de los eventos simples.

Caso S finito.
Si S = $\{s_1, ..., s_n\}$ y definimos P para cada evento simple, es decir, $P(\{s_i\})$, i = 1, ..., n, de modo que

$$P(\{s_i\}) \geq 0, \; i = 1, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(\{s_i\}) = 1$$

entonces estos valores de P determinan una única distribución de probabilidad dada por

$$P(A) = \sum_{s_i \in A} P(\{s_i\}) \qquad P(\emptyset) = 0.$$

(la probabilidad de A se obtiene sumando las probabilidades de los eventos simples que lo componen)

Caso S infinito numerable.
Si S = $\{s_1, s_2, s_3, ...\}$ y definimos P para cada evento simple, es decir, $P(\{s_i\})$, i = 1, ..., $\propto$, de modo que

$$P(\{s_i\}) \geq 0, \; i = 1, ..., \propto$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(\{s_i\}) = 1$$

entonces estos valores de P determinan una única distribución de probabilidad dada por

$$P(A) = \sum_{s_i \in A} P(\{s_i\}) \qquad P(\emptyset) = 0.$$

(la probabilidad de A se obtiene sumando las probabilidades de los eventos simples que lo componen)

Ejemplo El experimento consiste en tirar un dado.

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

P(S) tiene 2^6 = 64 eventos.

Los eventos simples son {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}.

Podemos definir

P({1}) = 0, P({2}) = 0, P({3}) = 0, P({4}) = 0, P({5}) = 1/3, P({6}) = 2/3.

Se tiene que cada uno de estos valores son no negativos, además

P({1}) + P({2}) + P({3}) + P({4}) + P({5}) + P({6}) = 0 + 0 + 0 + 0 + 1/3 + 2/3.
= 1

Luego estos valores de P determinan una distribución de probabilidad y para calcular P de cualquier otro evento se procede de la siguiente forma,

P({1, 6}) = P({1}) + P({6}) = 0 + 2/3 = 2/3

P({1, 3, 5}) = P({1}) + P({2}) + P({3}) = 0 + 0 + 0 = 0
P({5, 6}) = P({5}) + P({6}) = 1/3 + 2/3 = 1

Se tiene que P(S) = 1, y como podemos observar con este ejemplo un evento puede tener probabilidad 1 sin ser S.

Del mismo modo,

Se tiene que P(∅) = 0, y según este ejemplo un evento puede tener probabilidad 0 sin ser ∅.

———————————————————————————————

Como hemos visto para un mismo experimento la distribución de probabilidad P puede definirse de diferentes formas. Sin embargo, se debe buscar que la definición de P refleje la naturaleza del experimento.

Esto puede hacerse de dos formas. La definición de P, puede basarse en un conocimiento previo de la naturaleza del experimento (noción de probabilidad a priori) o bien se puede utilizar la información obtenida al realizar el experimento un número grande de veces (noción de probabilidad a posteriori).

Definición de probabilidad a priori o clásica

Si el experimento tiene un espacio muestral con N eventos simples igualmente posibles y si un evento A contiene N_A elementos, entonces se define

$P(A) = N_A/N$.

(P se llama **distribución de igual probabilidad**)

Ejemplo. El experimento consiste en tirar una moneda. Se considera

S = {cara, ceca}

La familia de eventos es

P(S) = {∅,{cara}, {ceca}, S}

Hay sólo dos eventos simples {cara}y {ceca}. Si no tenemos razones para pensar que la moneda está mal balanceada, estos eventos tendrán la misma posibilidad de salir y podemos definir P como una distribución de igual probabilidad.

#S = 2
#{cara} = 1, entonces P({cara}) = #{cara} / #S = 1/2.
#{ceca} = 1, entonces P({ceca}) = #{ceca} / #S = 1/2.

Además se cumple P(S) = 1, pues

#S = 2, entonces P(S) = #S / #S = 2/2 = 1.

y P(∅) = 0, pues

#∅ = 0, entonces P(∅) = #vacio / #S = 0/2 = 0.

Ejemplo El experimento consiste en tirar un dado.

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

P(S) tiene $2^6 = 64$ eventos. Los eventos simples son {1}, {2}, {3}, {4}, {5} y {6}. Si el dado está bien balanceado, estos eventos tendrán la misma posibilidad de salir y podemos definir P como una distribución de igual probabilidad.

$\#S = 6$.

Cada uno de los eventos simples tiene un solo elemento, por lo tanto su probabilidad será 1/6. Para otros eventos se tiene,

$P(\{1, 3, 5\}) = 3/6 = 1/2$

$P(\{1, 3\}) = 2/6 = 1/3$

$P(\{4, 5, 6\}) = 3/6 = 1/2$

La noción de probabilidad a posteriori se basa en la idea de que la probabilidad de un evento mide, en cierto sentido, el porcentaje de veces que el evento debería realizarse si se ejecutara el experimento un número grande de veces.

Definición de probabilidad a posteriori o frecuencial

Se repite el experimento N veces. Si en esas repeticiones el evento A se realiza N_A veces, entonces se define

$P(A) = N_A/N$.

N_A se llama frecuencia de aparición (observada) del evento A.

N_A/N se llama frecuencia relativa de aparición (observada) del evento A.

Ejemplo. El experimento consiste en tirar una moneda. Se considera

S = {cara, ceca}

La familia de eventos es

$P(S) = \{\emptyset, \{cara\}, \{ceca\}, S\}$

Se tira la moneda 100 veces y se observa

Resultado	Frecuencia	Frecuencia relativa
Cara	55	55/100 = 0.55
Ceca	45	45/100 = 0.45

En base a lo anterior se define,

$P(\{cara\}) = 0.55$ $\quad$ $P(\{ceca\}) = 0.45$

Si el conocimiento que se tiene del experimento permite asignarle una probabilidad a priori a los eventos, es de esperar que coincida o sea muy aproximada a la asignación que se obtiene con esta definición a posteriori. En este caso, se podría pensar que la moneda está bien balanceada y la probabilidad a posteriori es una buena aproximación a lo que se esperaría: 0.5 para cada evento.

Otro caso podría ser, se tira la moneda 100 veces y se observa

Resultado	Frecuencia	Frecuencia relativa
Cara	4	4/100 = 0.04

Ceca	96	96/100 = 0.96

En base a lo anterior se define,

P({cara}) = 0.04 P({ceca}) = 0.96

Observación. La definición a posteriori o frecuencial se basa en un principio heurístico llamado:

Regularidad estadística: si se repite el experimento N_1, N_2, N_3 ... veces con N_1 , entonces las frecuencias relativas observadas de un evento A en esas repeticiones, $f_1(A)$, $f_2(A)$, $f_3(A)$, tienden a un cierto número. Este número es el que se toma como P(A).

$$f_1(A), f_2(A), f_3(A), \ldots \to P(A).$$

En la práctica, este valor se desconoce y lo que se hace es repetir el experimento un número determinado de N veces, y se considera P(A) = f(A).