2.8 Regla de Bayes

En la teoría de la probabilidad el **teorema de Bayes** es un resultado enunciado por Thomas Bayes en 1763que expresa la probabilidad condicional de un evento aleatorio A dado B en términos de la distribución de probabilidad condicional del evento B dado A y la distribución de probabilidad marginal de sólo A.

En términos más generales y menos matemáticos, el teorema de Bayes es de enorme relevancia puesto que vincula la probabilidad de A dado B con la probabilidad de B dado A. Es decir que sabiendo la probabilidad de tener un dolor de cabeza dado que se tiene gripe, se podría saber -si se tiene algún dato más-, la probabilidad de tener gripe si se tiene un dolor de cabeza, muestra este sencillo ejemplo la alta relevancia del teorema en cuestión para la ciencia en todas sus ramas, puesto que tiene vinculación íntima con la comprensión de la probabilidad de aspectos causales dados los efectos observados.

Sea $\{A_1, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_n\}$ un conjunto de sucesos mutuamente excluyentes y exhaustivos, y tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero. Sea B un suceso cualquiera del que se conocen las probabilidades condicionales $P(B \mid A_i)$. Entonces, la probabilidad $P(A_i \mid B)$ viene dada por la expresión:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

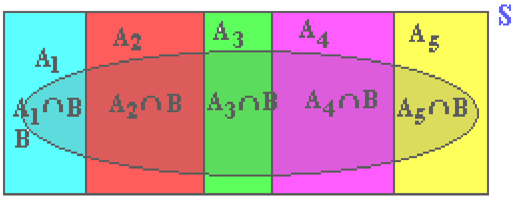
donde:

- $P(A_i)$ son las probabilidades a priori.
- $P(B \mid A_i)$ es la probabilidad de B en la hipótesis A_i.
- $P(A_i \mid B)$ son las probabilidades a posteriori.

Proposición 3.8: Sean A_l, A_2, ,A_k, una partición de S, esto es

$A_{i\text{ç}} A_j = \text{Æ}$, $\forall i,\ j\ ,\ i \neq j\ ,\ i = 1, 2, \cdots, k\ ,\ j = 1, 2, \cdots, k$ y $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$. Entonces para cualquier evento B se tiene que: $P(B) = P(A_1)\ P(B/A_1) + P(A_2)\ P(B/A_2) + \text{¼} + P(A_k)P(B/A_k)$

Demostración: Considérese el siguiente diagrama



P(B) = P(BÇ S)

= P[BÇ (A_1 *È* A_2 *È ¼ È* A_k *)]*

= P[(BÇ A_1*)È (BÇ* A_2*)È ¼ È (BÇ* A_k *)]* (unión de eventos mutuamente excluyentes)

= P(BÇ A_1*) + P(BÇ* A_2*) +¼ +P(BÇ* A_k*)* (por el axioma 3)

= $P(A_1)P(B/A_1)+ P(A_2)P(B/A_2)+$ *¼* $+P(A_k)P(B/A_k)$ (por ecuación [3.3])

$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)$

Proposición 3.9: *(REGLA DE BAYES)*

Sean A_I, A_2, ,A_k, una partición de S y B un evento cualquiera en S. Entonces

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Demostración: Por la proposición 3.8, $P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)$ [3.6]

Por la definición de probabilidad condicional se tiene

$$P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} \Leftrightarrow P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$$ [3.7]

$$P(A_i|B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} \Leftrightarrow P(B \cap A_i) = P(B)P(A_i|B)$$ [3.8]

Igualando [3.7] y [3.8], $P(A_i)P(B|A_i) = P(B)P(A_i|B)$ y despejando $P(A_i/B)$ se tiene

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} \quad [3.9]$$

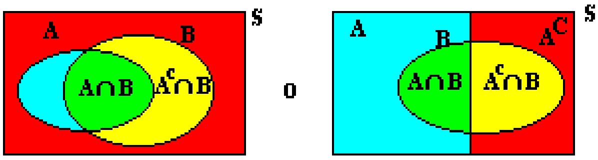
Sustituyendo [3.6] en [3.9] se llega a la fórmula deseada

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Corolario:

Si A y A^C son una partición de S y B es un evento cualquiera de S, entonces

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A^C \cap B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^C)P(B|A^C)}$$



Ejemplo 31: Un ingeniero químico sabe que cuando se compran etiquetas a un proveedor A, el número de etiquetas defectuosas y no defectuosas están en la relación 1:24; mientras que el proveedor B afirma que la probabilidad de encontrar una etiqueta no defectuosa en su compañía es de 9/10. Si se compra la misma cantidad de etiquetas a ambos proveedores:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que si se encontró una defectuosa, ésta sea del proveedor B?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que sea del proveedor A, si se encontró que no es defectuosa?

Solución: Sea D el evento de que la etiqueta sea defectuosa y D^C que no lo sea. Entonces por el corolario anterior se tiene:

$$a.\quad P(B|D)=\frac{P(B)P(D|B)}{P(B)P(D|B)+P(A)P(D|A)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\frac{1}{25}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{7}{100}}=\frac{10}{14}=0.7143$$

$$b.\quad P(A|D^{C})=\frac{P(A)P(D^{C}|A)}{P(A)P(D^{C}|A)+P(B)P(D^{C}|B)}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\frac{24}{25}}{\frac{1}{2}\frac{24}{25}+\frac{1}{2}\frac{9}{10}}=$$

$$=\frac{\frac{24}{50}}{\frac{93}{100}}=\frac{48}{93}=0.5161$$

Visto en un diagrama de árbol